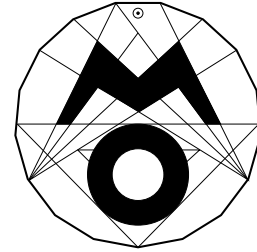


**51. Mathematik-Olympiade**  
**1. Stufe (Schulstufe)**  
**Klasse 5**  
**Aufgaben**



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
[www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de). Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510511

- a) Zeichne fünf Geraden, die genau vier Schnittpunkte haben.
- b) Zeichne fünf Geraden, die genau fünf Schnittpunkte haben.
- c) Wie viele Schnittpunkte können fünf verschiedene Geraden höchstens haben?  
Zeichne fünf Geraden mit dieser Höchstzahl von Schnittpunkten.

*Hinweis:* Zwei parallele Geraden haben keinen Schnittpunkt; zwei nicht parallele Geraden schneiden sich immer in genau einem Punkt.

510512

Sarah hat auf der Reise in den Urlaub Langeweile und schreibt alle Zahlen von 1 bis 150 auf: 1, 2, 3, 4, ..., 147, 148, 149, 150.

- a) Wie viele einstellige, wie viele zweistellige und wie viele dreistellige Zahlen hat Sarah geschrieben? Wie viele Ziffern hat Sarah insgesamt geschrieben?
- b) Wie viele Ziffern „3“ hat Sarah dabei insgesamt geschrieben? Und wie oft hat sie die Ziffer „5“ geschrieben?
- c) Ihrem Bruder Tino fällt ein neues Rätsel dazu ein. Er radiert nun, von hinten beginnend, die Zahlen 150, 149 usw. weg, bis Sarah, ohne auf das Blatt zu sehen, Halt ruft. Nun zählt Tino, wie oft die Ziffer „3“ noch da steht, und sagt die Anzahl: Es sind noch 25. Welche Zahlen hat Tino wegradiert?
- d) Tino und Sarah überlegen weiter. „Stell’ dir vor“, sagt Tino, „du hättest alle Zahlen von 300 bis 450 aufgeschrieben, ich hätte dann wieder von hinten anfangend die Zahlen wegradiert, du hättest Halt gesagt, und ich sagte dir dann, es sind noch 40 Ziffern „3“ übrig. Welche Zahlen hätte ich dann wegradiert?“  
Sarah überlegt einen Moment und sagt dann: „Dann hättest du einen Fehler gemacht!“  
Wieso hat Sarah mit dieser Aussage Recht?

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

### 510513

Hier geht es um Kryptogramme, also Zahlenrätsel, bei denen die Buchstaben Ziffern bezeichnen – verschiedene Buchstaben bezeichnen verschiedene Ziffern, gleiche Buchstaben bezeichnen gleiche Ziffern.

Ersetze für eine Lösung die Buchstaben so durch Ziffern, dass eine richtig gelöste Aufgabe entsteht.

- a) Gib für das folgende Kryptogramm eine Lösung an.

$$\begin{array}{r} E I N S \\ + E I N S \\ \hline Z W E I \end{array}$$

- b) Gib für das folgende Kryptogramm drei Lösungen an (obwohl der TEXT ja nicht stimmt ...).

$$\begin{array}{r} E I N S \\ + E I N S \\ \hline D R E I \end{array}$$

- c) Bei dem folgenden Kryptogramm stimmt der TEXT. Warum gibt es dennoch keine Lösung?

$$\begin{array}{r} D R E I \\ - E I N S \\ \hline Z W E I \end{array}$$

### 510514

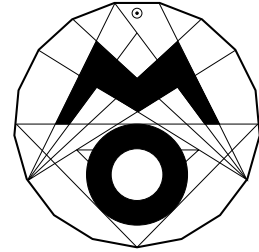
Lea, Katja und Sophie nehmen an einem Ratespiel im Radio teil. Sie sollen Hinweise zu ihrem Aussehen geben; dabei macht jedes der drei Mädchen drei Aussagen, und zwar folgende:

- |         |                                |
|---------|--------------------------------|
| Lea:    | (1a) Katja hat schwarze Haare. |
|         | (1b) Sophie hat grüne Augen.   |
|         | (1c) Ich habe kurze Haare.     |
| Katja:  | (2a) Lea hat schwarze Haare.   |
|         | (2b) Lea hat braune Augen.     |
|         | (2c) Ich habe lange Haare.     |
| Sophie: | (3a) Katja ist blond.          |
|         | (3b) Lea hat grüne Augen.      |
|         | (3c) Katjas Haare sind kurz.   |

Der Moderator der Radiosendung schüttelt den Kopf und sagt: „Eure Haare sind zwar schwarz, rot und blond, eure Augen sind grün, blau und braun und die Haare sind lang, kurz und mittellang, aber ihr habt **alle drei** bei **allen** Beschreibungen gelogen.“

Wie sehen die drei Mädchen aus? Ermittle jeweils die Augenfarbe, die Haarfarbe und die Haarlänge jedes der drei Mädchen.

**51. Mathematik-Olympiade**  
**1. Stufe (Schulstufe)**  
**Klasse 6**  
**Aufgaben**



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510611

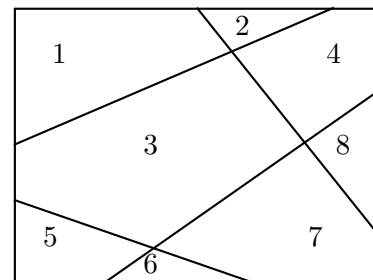
Ein Rechteck ist 6 cm lang und 4 cm breit. Mit einem Lineal werden vier verschiedene gerade Linien gezogen, die jeweils von einer der vier Kanten zu einer anderen Kante verlaufen müssen. Längs dieser Linien wird das Rechteck zerschnitten.

In der Zeichnung ist ein Beispiel dargestellt.

Hier würden 8 Papierschnipsel entstehen.

Wie viele Papierschnipsel können dabei entstehen, wenn die Linien anders verlaufen?

Gib alle verschiedenen Möglichkeiten der Anzahlen an, indem du jeweils ein Beispiel aufzeichnest und die Schnipsel nummerierst!



*Hinweis:* Zwei Möglichkeiten sollen nur dann verschieden sein, wenn sie sich in der Anzahl der Schnipsel unterscheiden. Die Form der Schnipsel spielt keine Rolle.

510612

Stephan schreibt sich auf ein Blatt Papier fortlaufend die Zahlen von 0 bis 200 auf.

- a) Zunächst streicht er alle Zahlen weg, die mindestens eine Ziffer 3 enthalten.  
Wie viele Zahlen bleiben übrig?
- b) Dann streicht er von den verbliebenen Zahlen alle weg, die mindestens eine Ziffer 5 enthalten.  
Wie viele Zahlen sind jetzt noch übrig?
- c) Wenn er von den verbliebenen Zahlen jetzt auch noch alle Quadratzahlen streicht – bleiben dann weniger oder mehr als die Hälfte der ursprünglichen Zahlen übrig?

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

### 510613

- a) Sabine betrachtet einen Spielwürfel mit den Zahlen von 1 bis 6 genauer und will sich für ihre Mitschüler in der Arbeitsgemeinschaft eine Aufgabe ausdenken. Sie weiß, dass die auf gegenüberliegenden Seitenflächen stehenden Zahlen zusammen stets die Summe 7 haben.  
Sie will die „Eckproduktsumme“ suchen lassen, die wie folgt gebildet werden soll: Sabine berechnet zunächst für jede Ecke das „Eckprodukt“, indem sie die auf den Seitenflächen stehenden Zahlen der Seitenflächen multipliziert, die an dieser Ecke zusammentreffen. Alle „Eckprodukte“ werden nun addiert und bilden die „Eckproduktsumme“.  
Welche „Eckproduktsumme“ hat der Spielwürfel?
- b) Auf den Seitenflächen sollen nun nicht die Zahlen von 1 bis 6 stehen, sondern alle einstelligen Zahlen sollen möglich sein, auch mehrfach. Welche Zahlen müssen auf den Seitenflächen des Würfels stehen, wenn man die größte „Eckproduktsumme“ erhalten will, und wie groß ist diese „Eckproduktsumme“?
- c) Jetzt sollen auf den Seitenflächen wiederum die Zahlen von 1 bis 9 stehen können, aber jede Zahl darf nur einmal vorkommen. Finde eine Belegung der Seitenflächen, so dass eine „Eckproduktsumme“ entsteht, die größer als 2011 ist.

### 510614

Die Sport-AG der Schule soll ein Tischtennis-Turnier organisieren. Die Sportler überlegen, wie sie den Sieger ermitteln wollen. Es haben sich 24 Kinder angemeldet. Es gibt mehrere Vorschläge:

- a) Anton schlägt vor, dass jeder gegen jeden genau einmal spielen soll.  
Wie viele Spiele müssen dann gespielt werden?
- b) Bea schlägt das KO-System vor. Es kommt immer nur der Gewinner weiter. Wenn erstmals eine ungerade Anzahl von Spielern übrig geblieben ist, beginnt die letzte Runde, in der dann jeder gegen jeden spielt.  
Wie viele Spiele finden bei diesem Vorschlag statt?
- c) Clemens möchte vier Staffeln  $A, B, C$  und  $D$  zu je 6 Spielern bilden. In jeder Staffel spielt jeder gegen jeden genau einmal. Die besten 2 jeder Staffel kommen in die zweite Runde. Nun werden zwei Staffeln zu je vier Spielern gebildet. Innerhalb einer Staffel spielt wieder jeder gegen jeden, und die besten 2 kommen in die dritte Runde. In der dritten Runde spielt auch jeder gegen jeden, und der Sieger wird ermittelt.  
Wie viele Spiele finden bei dieser Variante statt?

**51. Mathematik-Olympiade**  
**1. Stufe (Schulstufe)**  
**Klasse 7**  
**Aufgaben**



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510711

Erik hatte vor sich ein randvolles Glas Bananensaft und eine Flasche Kirschsafft. Zuerst trank er vorsichtig ein Sechstel des Bananensaftes und füllte das Glas mit der gleichen Menge Kirschsafft auf. Anschließend trank er davon ein Drittel und füllte das Glas wieder bis zum Rand mit Kirschsafft auf. Nun trank er die Hälfte und füllte nochmals das Glas mit Kirschsafft bis zum Rand auf. Dann trank er das Glas leer.

Untersuche, ob Erik mehr, gleichviel oder weniger Bananen- als Kirschsafft getrunken hat.

510712

Eine Reisegruppe von 40 Touristen kam in Australien an. Dreißig von ihnen hatten Amerikanische Dollar und zwanzig von ihnen hatten Britische Pfund.

- a) Ermittle die kleinstmögliche Anzahl von Touristen dieser Reisegruppe, die sowohl Amerikanische Dollar als auch Britische Pfund bei sich hatten.
- b) Ermittle die größtmögliche Anzahl von Touristen dieser Reisegruppe, die sowohl Amerikanische Dollar als auch Britische Pfund bei sich hatten.

510713

Der Umfang  $u$  eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen. Eine der Seiten dieses Dreiecks soll 2,5-mal so lang sein wie eine der anderen Seiten.

Untersuche, ob es möglich ist, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind. Ist dies der Fall, dann gib alle Möglichkeiten an.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

Anton und Bert schreiben Zahlenketten. Sie verwenden dazu die Zahlen  $1, 2, \dots, 10$ . Jede dieser Zahlen darf nur einmal verwendet werden.

Anton beginnt und schreibt eine der zehn Zahlen als Startzahl auf. Jetzt ist Bert an der Reihe. Er schreibt eine noch nicht verwendete Zahl rechts daneben. Diese Zahl muss ein Teiler oder ein Vielfaches der ersten Zahl sein. Anton wählt die nächste Zahl aus, um diese rechts anzufügen. Sie muss wieder ein Teiler oder ein Vielfaches der gerade vorher geschriebenen Zahl sein. So wird das Spiel fortgeführt, bis einer der beiden keine Zahl mehr rechts anfügen kann. Ist dies der Fall, dann hat der betreffende Spieler verloren.

- a) Gib 3 Startzahlen an, mit denen Anton das Spiel verliert, wenn Bert stets optimal spielt.
- b) Untersuche, ob es Startzahlen gibt, mit denen Anton das Spiel auch dann gewinnen kann, wenn Bert stets optimal spielt.

*Mathematische Grundlagen:* Viele mathematische Aufgaben kann man den Grundtypen *Beweis Aufgabe* oder *Bestimmungsaufgabe* zuordnen, siehe dazu auch den Grundlagen-text zur 1. Runde der 50. Mathematik-Olympiade. Diese findest du z.B. in der Aufgabensammlung des Mathematik-Olympiaden e. V., [http://www.mathematik-olympiaden.de/akt\\_aufgaben.html](http://www.mathematik-olympiaden.de/akt_aufgaben.html).

Ein weiterer Grundtyp von Aufgaben sind *Untersuchungsaufgaben*, bei denen zu *untersuchen* ist, ob Objekte mit bestimmten Eigenschaften existieren. Je nachdem, ob man die Nichtexistenz oder die Existenz vermutet, sind unterschiedliche Beweise zu führen. Bei der Nichtexistenz könnte es ein indirekter Beweis sein und wir hätten dann eine Beweis Aufgabe. Zum Nachweis der Existenz einer Lösung könnte man zum Beispiel eine Lösung angeben. Diese Lösung herzuleiten ist eine Bestimmungsaufgabe. Das Lösen einer Bestimmungsaufgabe kann man im Allgemeinen in zwei Schritte gliedern: Im ersten Schritt nimmt man die Existenz der Lösung an und zeigt, dass die Lösungen zu einer hergeleiteten Menge gehören müssen. Im zweiten Schritt zeigt man, dass die Elemente dieser Menge tatsächlich Lösungen sind. Dieser Schritt heißt daher auch *Existenzbeweis* oder *Probe*.

Beachte, dass sich eine Probe im Sinne eines Existenzbeweises von einer Rechenprobe, wie du sie von der Schule her kennst, unterscheidet. Eine *Rechenprobe* ist das nochmalige Durchführen einer Rechnung (möglichst in einer anderen Reihenfolge) oder ein Test wie zum Beispiel ein Teilbarkeitstest, der prüft, ob eine Lösung als falsch ausgeschlossen werden kann. Solche Proben solltest du immer machen, auch wenn es nicht verlangt ist. Ebenso solltest du immer nochmals prüfen, ob deine logischen Schlüsse korrekt sind. Die Probe im Sinne eines Existenzbeweises setzt voraus, dass du keinerlei mathematische oder logische Fehler gemacht hast. Wenn der Existenzbeweis wirklich einfach ist, genügt z. B. „Wie die Probe zeigt, sind nur ... Lösungen.“ In anderen Fällen kann dieser Beweis auch umfangreich sein.

Wenn du noch nicht weißt, ob du die Existenz oder Nichtexistenz beweisen möchtest, kannst du häufig nach den Schritten einer Bestimmungsaufgabe vorgehen: Der erste Schritt beginnt schon wie ein indirekter Beweis. Unter der Annahme, es gäbe eine Lösung, versuchen wir diese immer weiter einzugrenzen. Wenn wir im ersten Schritt einen Widerspruch erhalten, gibt es keine Lösungen. Lässt der erste Schritt vielleicht doch Lösungen zu, so untersuchen wir im zweiten Schritt, ob diese tatsächlich Lösungen sind oder ob die Aufgabe doch keine Lösungen hat. Je nachdem, was du erhalten hast, kannst du dann die Lösung als Widerspruchsbeweis für die Nichtexistenz oder als Bestimmungsaufgabe für die Existenz einiger bzw. aller Lösungen ausformulieren.

**51. Mathematik-Olympiade**  
**1. Stufe (Schulstufe)**  
**Klasse 8**  
**Aufgaben**



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
[www.mathematik-olympiaden.de](http://www.mathematik-olympiaden.de). Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

510811

Als Eulenspiegel wieder einmal auf Wanderschaft war, traf er unterwegs einen Handwerksburschen. Sie hatten Hunger und gingen gemeinsam bis zum nächsten Wirtshaus. Dort verspeisten sie ein köstliches Mahl, für das jeder von ihnen einen Taler hätte bezahlen müssen. Auf Wunsch des Wirtes begannen sie aber zunächst mit einem Kartenspiel.

Zuerst verlor Eulenspiegel die Hälfte seines Geldes zu gleichen Teilen an den Handwerksburschen und an den Wirt. Danach verlor der Handwerksbursche die Hälfte seines nun vorhandenen Geldes zu gleichen Teilen an Eulenspiegel und den Wirt. Schließlich verlor der Wirt die Hälfte seines dann vorhandenen Geldes zu gleichen Teilen an den Handwerksburschen und an Eulenspiegel. Nach Abschluss dieses dritten Spieles hatte jeder der drei Spieler genau 8 Taler.

Ermittle, wie viel jeder der Spieler bei diesem Kartenspiel insgesamt gewonnen oder verloren hat.

510812

Die Feldspätzin Molly fand, dass es wieder einmal Zeit sei, ihre Freundin Nelly in der 6 km entfernten Stadt zu besuchen. Die gleiche Idee hatte auch Nelly. Just als es vom Kirchturm 16 Uhr schlug, flogen beide daheim los und pfeilgerade mit jeweils konstanter Geschwindigkeit einander entgegen. Dabei war die schlanke Städterin eineinhalbmal so schnell wie Molly. Nach genau zwei Minuten Flugzeit verschnaufte Nelly auf einem Baum und flog nicht weiter. Exakt vier Minuten später traf auch die mollige Feldspätzin dort ein.

Ermittle die Geschwindigkeiten, mit denen Molly und Nelly flogen.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

### 510813

Eine Strecke, deren Endpunkte auf einem Kreis liegen, bezeichnet man als *Sehne* dieses Kreises. Ein Viereck  $ABCD$ , dessen Eckpunkte in der Reihenfolge  $A, B, C, D$  auf einem Kreis liegen, heißt *Sehnenviereck*.

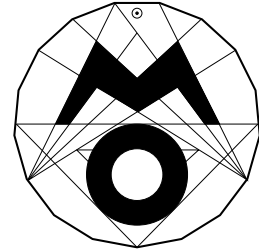
- a) Die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  mit den Koordinaten  $(6; 0)$ ,  $(10; 2)$ ,  $(10; 8)$  und  $(3; 1)$  sind Eckpunkte eines Sehnenvierecks.  
Trage diese Punkte in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein und konstruiere einen Kreis, auf dem alle vier Punkte liegen.  
Beschreibe, wie du den Kreismittelpunkt konstruiert hast, und gib seine Koordinaten an.
- b) Zeichne drei verschieden große Kreise und in jeden dieser Kreise ein Sehnenviereck. Miss die Größen aller Innenwinkel der Vierecke und bilde jeweils von zwei gegenüberliegenden Innenwinkeln die Summe ihrer Größen.  
Welche Vermutung kann man aus diesen Beispielen ableiten?
- c) Beweise deine Vermutung für den Fall, dass der Mittelpunkt des Umkreises im Inneren des Sehnenvierecks liegt.

### 510814

Eine Palindromzahl ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Liest man ihre Ziffern von links nach rechts, so ergibt sich dieselbe Zahl, wie beim Lesen von rechts nach links. Die Zahl 615 516 ist eine Palindromzahl. Die Zahl 415 ist keine Palindromzahl, denn wenn man die Ziffern von rechts nach links liest, erhält man die Zahl 514.

- a) Beweise: Eine sechsstellige Palindromzahl ist immer durch 11 teilbar.
- b) Beweise: Wenn man alle sechsstelligen Palindromzahlen durch 11 dividiert, dann sind mindestens 10 % dieser Quotienten fünfstellige Palindromzahlen.
- c) Untersuche: Gibt es mehr sechsstellige Palindromzahlen, die bei der Division durch 11 keine fünfstellige Palindromzahl ergeben, als solche, bei denen sich eine fünfstellige Palindromzahl ergibt?

**51. Mathematik-Olympiade**  
**1. Stufe (Schulstufe)**  
**Klasse 9 und 10**  
**Aufgaben**



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweise: 1. Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.

2. Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

511011

Martin reklamiert bei seinem Vorgesetzten Herrn Geizig: „Mir wurde zu wenig Geld für meine Reisekosten überwiesen! Ich hatte Ihnen doch die exakte ganzzahlige Summe angegeben und jetzt fehlen genau 26 €.“ Herr Geizig antwortet: „Entschuldigen Sie, da muss mir wohl ein Zahlendreher unterlaufen sein! Ich habe bestimmt im Betrag einfach zwei Ziffern vertauscht.“

Begründen Sie, dass diese Erklärung nicht stimmen kann.

511012

Die Seiten zweier unterschiedlich dicker Bücher werden fortlaufend durchnummeriert – jeweils beginnend mit der Seite 1 auf der Vorderseite des ersten Blattes.

- a) Zum Nummerieren der Seiten des ersten Buches benötigt man 6941 Ziffern. Ermitteln Sie die Nummer der letzten Seite.
- b) Wir betrachten im Folgenden die Seitennummern und nicht mehr die Anzahl der verwendeten Ziffern. Aus dem zweiten Buch hat jemand ein Blatt herausgerissen, dadurch fehlen die beiden Nummern auf Vorder- und Rückseite dieses Blattes. Die Summe aller noch verbliebenen Seitennummern im zweiten Buch beträgt 81 707. Ermitteln Sie die beiden fehlenden Seitennummern.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

### 511013

Es sollen Sitzanordnungen für sieben Paare (jeweils ein Mann und eine Frau) untersucht werden. Eines dieser Paare ist das Hochzeitspaar, die anderen sind bei der Hochzeitsfeier zu Gast. Es stehen zwei runde Tische zur Verfügung: ein Tisch für vier Paare und einer für drei Paare. Das Hochzeitspaar soll am großen Tisch sitzen. Die Paare setzen sich stets so an den Tisch, dass jede Frau rechts neben ihrem Mann sitzt.

- a) Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es?

Hinweis: Zwei Sitzordnungen an einem Tisch sollen gleich sein, wenn man die eine aus der anderen dadurch erreichen kann, dass alle am Tisch Sitzenden um einen Stuhl oder um die jeweils gleiche Anzahl von Stühlen in die gleiche Richtung rutschen (den Platz der vorher dort Sitzenden einnehmen).

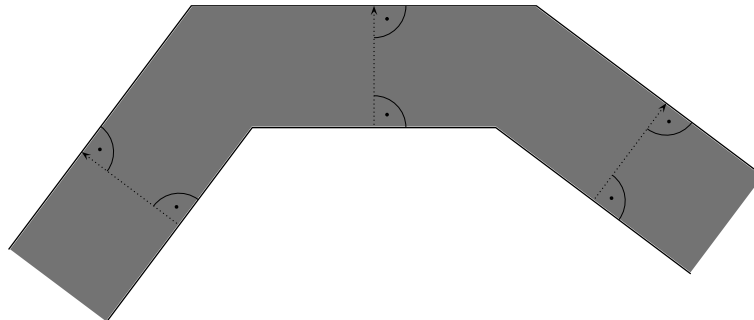
- b) Zu später Stunde werden alle Regeln bezüglich der Sitzordnung fallen gelassen; jeder setzt sich da hin, wo er möchte. Wie viele Sitzordnungen sind jetzt denkbar?

### 511014

Alle Seiten eines konvexen  $n$ -Ecks vom Umfang 12 cm werden um 1 cm nach außen „verschoben“ wie in der Skizze für einen Teil eines solchen  $n$ -Ecks dargestellt.

Beweisen Sie, dass sich dabei der Flächeninhalt des  $n$ -Ecks um mehr als  $15 \text{ cm}^2$  vergrößert.

Hinweis: Ein  $n$ -Eck heißt konvex, wenn nichtbenachbarte Seiten keinen gemeinsamen Punkt haben und alle Innenwinkel kleiner als  $180^\circ$  sind.



### 511015

Beweisen Sie für beliebig gegebene positive ganze Zahlen  $m$  und  $n$ :

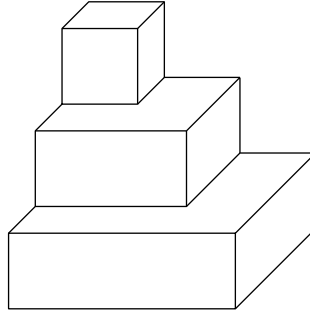
- a) Es ist möglich,  $m+n$  unterschiedliche Punkte  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$  in derselben Ebene so zu wählen, dass
- es eine Gerade durch die Punkte  $A_1, \dots, A_m$  gibt,
  - es eine andere Gerade durch die Punkte  $B_1, \dots, B_n$  gibt
  - und die Geraden  $A_i B_k$  und  $A_j B_\ell$  parallel sind, falls  $i + \ell = j + k$  ist.
- b) Es ist möglich,  $m+n$  Punkte  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$  (wieder paarweise verschieden) in derselben Ebene so zu wählen, dass
- keine drei dieser  $m+n$  Punkte auf derselben Geraden liegen,
  - die Geraden  $A_i B_k$  und  $A_j B_\ell$  parallel sind, falls  $i + \ell = j + k$  ist.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

511016

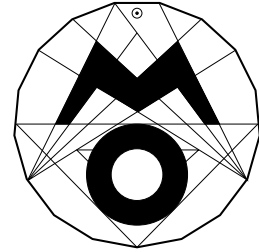
Aus Einheitswürfeln der Kantenlänge 1 cm wird ein stufenförmiger Körper wie folgt zusammengesetzt: In der obersten Schicht befindet sich genau ein Würfel. Er steht auf einer Schicht aus  $2 \cdot 2$  Würfeln, diese wiederum auf einer Schicht aus  $3 \cdot 3$  Würfeln usw.

Wenn ein solcher Körper  $n$  Schichten besitzt, dann besteht die unterste Schicht also aus  $n \cdot n$  Würfeln. Die Schichten des Körpers sind so angeordnet, wie es die Abbildung für  $n = 3$  zeigt.



- a) Aus Einheitswürfeln wurde ein solcher Körper mit 6 Schichten zusammengeleimt. Danach bearbeitete man diejenigen Kanten des Körpers mit einer Schleifmaschine, die die Stufen vorn und rechts bilden. Auf diese Weise entstand durch das schräge Abschleifen der Stufen eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche und einem Volumen  $V = 72 \text{ cm}^3$ . (Die Existenz einer solchen Pyramide kann hier vorausgesetzt werden; eine Begründung wird nicht verlangt.)  
Berechnen Sie den Anteil des Ausgangsvolumens, der bei der Bearbeitung abgeschliffen wurde.
- b) Untersuchen Sie, ob bei einem stufenförmigen Körper mit  $n = 2011$  Schichten die Anzahl der verwendeten Einheitswürfel durch 9 teilbar ist. Sollte dies nicht der Fall sein, dann ermitteln Sie die erste Zahl  $n$  nach 2011, für die diese Anzahl durch 9 teilbar ist.
- c) Begründen Sie, dass für jede positive Schichtenanzahl  $n$  der stufenförmige Körper aus mehr als  $\frac{1}{3} \cdot n^3$ , aber aus weniger als  $\frac{1}{3} \cdot (n + 1)^3$  Einheitswürfeln besteht.

51. Mathematik-Olympiade  
1. Stufe (Schulstufe)  
Klasse 11-13  
Aufgaben



© 2011 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

511311

Man ermittle alle Paare  $(n; p)$  mit einer positiven ganzen Zahl  $n$  und einer Primzahl  $p$ , die die Gleichung

$$n^2 - 8n + 6 = p - 1$$

erfüllen.

511312

Gegeben sei ein Halbkreis über der Strecke  $\overline{AC}$ . Auf der Strecke  $\overline{AC}$  liege der Punkt  $B$ . Die Senkrechte zu  $\overline{AC}$  durch  $B$  schneide den Halbkreis über der Strecke  $\overline{AC}$  im Punkt  $D$ . Über den Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  seien Halbkreise gezeichnet wie in der Abbildung gezeigt.

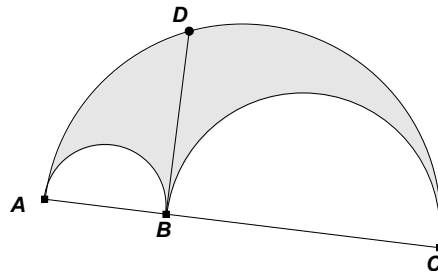


Abbildung A511312

Man beweise, dass der Kreis mit dem Durchmesser  $\overline{BD}$  und die grau markierte Fläche denselben Flächeninhalt haben.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

### 511313

Man bestimme den kleinstmöglichen Wert des Produktes  $p = a \cdot b \cdot c \cdot d$ , wenn die ganzen Zahlen  $a, b, c, d$  den folgenden Bedingungen (1)–(4) genügen:

- (1)  $a > 10$ ,
- (2)  $6a = b + c$ ,
- (3)  $8a = c + d - 2$ ,
- (4)  $10a = b + c + d - 3$ .

### 511314

Es wird ein Würfelspiel mit folgenden Regeln gespielt: Ein Spieler würfelt mit einem Würfel und bekommt die jeweiligen Augenzahlen als Punkte gutgeschrieben, bis er eine Eins bekommt oder sich entscheidet aufzuhören. Bekommt er eine Eins, verfallen alle bisher erwürfelten Punkte und das Spiel ist beendet. Hört er auf, erhält er alle Punkte gutgeschrieben.

Der Spieler möchte so spielen, dass der Erwartungswert seiner Punktzahl möglichst hoch ist.

- a) Sollte er weiterspielen, wenn er bereits 15 Punkte erreicht hat?
- b) Der Spieler möge  $x$  Punkte erreicht haben. Für welche Werte von  $x$  würde man ihm nun raten aufzuhören?